ISBN 978-85-89082-23-5

Demonstração em Matemática[1]

Irineu Bicudo[2]

Resumo

A demonstração, como definida nos textos de Lógica Matemática, deveria modelar as demonstrações matemáticas. Não é, no entanto, o que se vê nos livros e nos jornais matemáticos. A demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico.

Abstract

It must be accepted as a dogma that the logical definition of a proof is the paradigma of a mathematical proof. Despite of this, mathematical proof is what people in the field say it is, and it does not matter how far it may be of the logical ideal.

> Ora, um matemático tem uma vantagem sem par sobre os outros cientistas, em geral, historiadores, políticos, e expoentes de outras profissões: ele Pode errar. A fortiori, ele pode também acertar. [...] Um erro feito por um matemático, mesmo um grande matemático, não é uma "diferença de pontos de vista" ou "uma outra interpretação dos dados" ou "ditado por uma ideologia conflitante"; é um erro. Os maiores matemáticos, aqueles que descobriram a maior quantidade de verdades matemáticas, são também aqueles que publicaram o maior número de demonstrações com lacunas, asserções insuficientemente qualificadas, e meros erros [...]
> Os erros cometidos por um grande matemático são de dois tipos: primeiramente, enganos triviais, que qualquer um pode corrigir; em segundo lugar, falhas titânicas, refletindo a escala do combate travado pelo grande matemático. Falhas desse último tipo são, freqüentemente, tão importantes como o sucesso, pois dão lugar a grandes descobertas por outros matemáticos. Um erro de um grande matemático tem feito, muitas vezes, para a ciência, mais do que cem impecáveis teoreminhas provados por homens menos notáveis (C.A. Truesdell, III, 1919 – 2000).

No início do pequeno livro "The Foundations of Mathematics", F.R. Ramsey esclarece:

> Neste capítulo, estaremos lidando com a natureza geral da matemática pura, e como ela se distingue das outras ciências. Aqui há, realmente, duas categorias existentes de coisas, das quais se deve dar conta – as idéias ou conceitos da matemática, e as proposições da matemática. Essa distinção não é artificial nem desnecessária, pois a grande

[1] Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.
[2] Professor Titular do Departamento, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro.

> maioria dos escritores do assunto tem concentrado sua atenção na explicação de uma ou de outra dessas categorias, e, erroneamente, suposto que a explanação satisfatória da outra seguiria imediatamente.

De fato, parece um fato notório que o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: DEFINIR seus conceitos e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos.

Em um sentido muito geral, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos, anteriormente definidos. Similarmente, demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Sem recorrer, como fazem os dicionários, ao círculo vicioso, sabemos que é impossível definir todas as noções matemáticas. Do mesmo modo, não alcançamos demonstrar todas as proposições necessárias, na caminhada retrocessiva, exigida por uma demonstração. Assim, lança-se mão de alguns conceitos, tomados sem definição, e de algumas proposições, aceitas sem demonstração, e estabelece-se, por assim dizer, a arquitetura das teorias matemáticas: conceitos primitivos e conceitos derivados; axiomas e teoremas.

Supondo que tais considerações sejam intuitivamente claras, do ponto de vista do filósofo da matemática há uma questão epistemológica candente: o que é uma DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA?

O que torna a pergunta crucial é o fato, quase que universalmente acordado, de que falar em matemática é falar de demonstração. Por exemplo, do livro “Mathematical Logic” de Joseph R. Shoenfield:

> A lógica é o estudo do raciocínio; e a lógica matemática é o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos. Para descobrir a abordagem própria à lógica matemática, devemos, portanto, examinar os métodos do matemático.
>
> O aspecto conspícuo da matemática, em oposição às outras ciências, é o uso da DEMONSTRAÇÃO, em vez da observação. Um físico pode provar leis físicas a partir de outras leis físicas; mas ele, usualmente, considera a concordância com a observação como o teste último para uma lei física. Um matemático pode, ocasionalmente, usar a observação; pode, por exemplo, medir os ângulos de muitos triângulos e concluir que a soma dos ângulos é sempre 180°. Entretanto, aceitará isso, como uma lei da matemática, somente quando tiver sido demonstrado.

ISBN 978-85-89082-23-5

Ou da obra “Thinking about Mathematics – The Philosophy of Mathematics” de Stewart Shapiro:

> Como o conhecimento matemático parece estar baseado em DEMONSTRAÇÃO, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese empiricista. De fato, a matemática é, algumas vezes, tida como um paradigma de um conhecimento a priori – conhecimento anterior a, e independente da experiência.

Tem-se dito, conforme Halmos, em “I want to be a mathematician”, que o maior dos passos isolados, na lógica dos últimos 200 anos, foi a explicação precisa do conceito de DEMONSTRAÇÃO.

De que modo a lógica define “demonstração”?

Caracteriza-se o que vem a ser um SISTEMA FORMAL, que é, grosseiramente falando, a parte sintática de um sistema axiomático, como descrito no início destas considerações. De modo preciso, a primeira parte de um sistema formal é sua LINGUAGEM. Para especificá-la, devemos, antes de mais nada, mencionar-lhe seus SÍMBOLOS. Toda seqüência finita de símbolos da linguagem é uma EXPRESSÃO da linguagem. Do conjunto das expressões, destaca-se um subconjunto, cujos membros são as FÓRMULAS da linguagem. Uma linguagem é considerada completamente especificada quando estivem especificados seus símbolos e suas fórmulas.

A parte seguinte de um sistema formal consiste nos seus AXIOMAS. A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal.

Necessitamos, ainda, de uma terceira parte para um sistema formal, que nos capacite a concluir teoremas a partir dos axiomas. Isso é fornecido pelas REGRAS DE INFERÊNCIA. Cada uma delas afirma que, sob certas condições, uma fórmula, chamada a CONCLUSÃO da regra, pode ser INFERIDA de certas outras, chamadas as HIPÓTESES da regra.

Uma regra em um sistema formal F é FINITA se tiver um número finito de hipóteses.

Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma seqüência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de A. Uma fórmula A de F será um teorema de F se existir uma demonstração de A.

ISBN 978-85-89082-23-5

Do que ficou, anteriormente, declarado – de ser a lógica matemática o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos – devemos deduzir que a "demonstração matemática" é algo, cujo modelo é uma demonstração em um sistema formal, como acabamos de expor?

Vejamos algumas observações de Hermannn Weyl, em seu livro "Das Continuum":

> Nada precisa ser dito do bem conhecido significado da inferência lógica para a ciência. E todos têm em conta, exatamente, qual o papel do método dedutivo na matemática. Os estados de coisas com que a matemática lida são, exceto para os mais simples, tão complicados, que é praticamente impossível trazê-los, plenamente dados, à consciência, e, desse modo, apreendê-los completamente. Assim, a situação em matemática é, de fato, como segue. A matemática ocupa-se com julgamentos PERTINENTES, GERAIS, VERDADEIROS. Entre esses estão uns poucos que são imediatamente reconhecidos como verdadeiros, os AXIOMAS, digamos U_1, U_2, U_3, U_4, tais que todos os outros julgamentos pertinentes, gerais, verdadeiros sejam conseqüências desses poucos, i.e., de $U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4$. Como nossa recente discussão das leis da lógica sugere, um sistema de inferências "elementares" que, em geral, toma a forma de um organismo de muitos membros, é necessário, a fim de demonstrar que um julgamento U é uma conseqüência dos axiomas. Para ser comunicado, esse sistema deve, então, ser transformado, de um modo artificial, em uma cadeia de elos interligados. É dessa maneira que uma DEMONSTRAÇÃO matemática tem lugar. Aqui, todo discernimento, que deve ser efetivado, é concentrado nas inferências lógicas, e não mais dirigido aos objetos e estados de coisas sobre o que as determinações foram feitas. (É, dificilmente, necessário mencionar que as descobertas das verdades matemáticas, e sua subseqüente apreensão pelo entendimento, ocorre mais "substantivamente" e muito menos "formalmente". Estamos meramente discutindo, aqui, a apreensão sistemática). Entretanto, devemos enfatizar ser uma mera CRENÇA científica que, por exemplo, todos os julgamentos pertinentes, gerais e verdadeiros sobre pontos, linhas e planos sejam deriváveis dos axiomas geométricos. Somos incapazes de apreender, por discernimento genuíno, que isso é assim, ou, mesmo, de "prová-lo" de um modo lógico, com base nas próprias leis da lógica.

Esse testemunho parece corroborar o ponto de vista de que a demonstração, como definida em um sistema formal, sirva, de fato, de modelo para as demonstrações matemáticas.

No mesmo sentido, caminham as considerações de Ian Stewart e David Tall, no livro "The Foundations of Mathematics". Depois de analisarem a demonstração de um teorema em um texto matemático e de reelaborarem essa demonstração, para enquadrá-la no que prescreve a lógica, ponderam:

ISBN 978-85-89082-23-5

> Essa análise de uma demonstração relativamente simples mostra que os matemáticos não escrevem demonstrações, precisamente, do modo descrito pela lógica. Passos são omitidos, tanto quando hipóteses são introduzidas como quando deduções são feitas; novas definições são produzidas; e o pacote todo é embrulhado em um estilo de prosa fluente, em total contraste com uma sequencia formal de proposições.
> Por que é assim?
> Em primeiro lugar, os matemáticos escreviam demonstrações muito antes de que elas fossem logicamente analisadas, de modo que o estilo em prosa veio primeiro e continua a ser usado. A principal razão é que a omissão de pormenores triviais e o uso de novos símbolos para construções complicadas são parte do processo de tentar tornar as deduções mais compreensíveis. A mente humana constrói teorias pelo reconhecimento de padrões e encobrindo pormenores, que são bem entendidos, de modo a poder concentrar-se no material novo. De fato, é limitada pela quantidade de nova informação que pode apreender de uma vez qualquer, e a supressão de pormenores familiares é, freqüentemente, essencial para a apreensão da imagem total. Em uma demonstração escrita, a dedução lógica passo a passo é, portanto, reduzida, onde seja já uma parte da técnica básica do leitor; assim, ele pode compreender a estrutura geral.
> Quando desenvolve uma nova teoria, o matemático praticamente tende a distinguir entre fatos bem estabelecidos, que fazem parte de sua técnica, e aqueles que estão no novo material, sendo forjado. Ele, então, toma as idéias estabelecidas, em boa parte, como sabidas, encurtando várias passos em uma única linha, em que sua técnica é fluente, freqüentemente, sem dar referências explícitas sobre onde encontrar as demonstrações desses fatos. Faz isso, confiante em que, se for desafiado, possa preencher as lacunas de sua demonstração (embora sua memória deva pagar o preço de recordar todos os fatos).
> Resultados recentemente estabelecidos constituem o núcleo da teoria que está sendo desenvolvida, e são, portanto, tratados com grande cuidado. Serão enunciados, claramente, como hipóteses, quando necessários, e serão dadas referências quanto a suas demonstrações.
> Quando omitir passos lógicos ou referências, em uma demonstração, e quando dá-los todos, é parte da indefinível qualidade: estilo matemático. Diferentes matemáticos diferirão em sua opinião.

Essa descrição, bastante razoável, de como procede o matemático praticante, mesmo sem levar em conta a reelaboração, citada, de uma demonstração matemática, para pô-la nos cânones da lógica, tem toda a evidência da crença dos autores em que a lógica modela a matemática.

Apesar da aparente completa aprovação desse ponto de vista, há lugar para algumas dúvidas e certos questionamentos.

Eis como Reuben Hersh os expõe em “What is mathematics, really”;

> O velho e coloquial significado de “demonstrar” é: testar, tentar, determinar o verdadeiro estado de coisas. De que modo a “demonstração” matemática se relaciona com o “demonstrar” velho e

> coloquial?
> Acusamos os estudantes do alto crime de "nem mesmo saberem o que é uma demonstração". No entanto, nós, professores de matemática, também não sabemos, se "saber" significar dar uma explanação fatual, coerente. (É claro, sabemos "dar uma demonstração" em nossa própria especialidade).
> O problema é que "demonstração matemática" tem dois significados. Na prática, é uma coisa; em princípio, outra. Os dois significados não são idênticos. Isso está bem. Porém, nunca reconhecemos a discrepância. Como pode isso estar bem?
> Significado número 1, o significado PRÁTICA, é informal, impreciso. A demonstração matemática prática é o que fazemos para fazermos o outro crer em nossos teoremas. É o argumento que convence o qualificado, mas cético especialista. É feita em Euclides e no The International Archive Journal of Absolutely Pure Homology. Mas, o que é ela, exatamente? Ninguém pode dizer.
> Significado número 2, a demonstração matemática teórica, é formal. Aristóteles ajudou a fazê-la. O mesmo fizeram Boole, Peirce, Frege, Russell, Hilbert e Gödel. É a transformação de certas seqüências de símbolos (sentenças formais) de acordo com certas regras da lógica (modus ponens,etc.). Uma seqüência de passos, cada um uma dedução lógica estrita, ou facilmente expandida a uma dedução lógica estrita. Isso é tomado como sendo uma "formalização, idealização, reconstrução racional da idéia de demonstração.

Problema A: O que o significado número 1 tem a ver com o significado número 2?

Problema B: Por que tão poucos notam o Problema A? É desinteressante? Embaraçante?

Problema C: Isso importa?

O Problema C é mais fácil do que A e do que B. Importa, moralmente, psicologicamente, e filosoficamente.

Quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém, não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que apreender. Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa.

Depois, o indivíduo torna-se um professor e passa o mesmo "know-how", sem o "saber o quê", que o professor ensinava.

Há um ponto de vista padrão, oficial. Ele faz duas asserções interessantes.

Asserção 1. Os lógicos não dizem ao matemático o que fazer. Fazem uma teoria do que o matemático realmente faz. Os lógicos, supostamente, estudam-nos do mesmo modo como os especialistas em dinâmica dos fluidos estudam ondas de água. Eles não dizem à água como ondular. Apenas fazem um modelo matemático dela.

ISBN 978-85-89082-23-5

Um especialista em dinâmica de fluidos estudando ondas de água, usualmente, faz duas coisas. De antemão, procura derivar um modelo a partir de princípios conhecidos. Depois, verifica o comportamento do modelo contra os dados do mundo real.

Há uma análise publicada de uma amostra de demonstrações práticas que derive demonstrações "rigorosas" como modelo das propriedades daquela amostra? Há estudos de caso de demonstrações práticas em comparação com demonstração teórica? Nunca ouvi falar deles. A reivindicação de que a demonstração teórica (leia-se: lógica) modela a demonstração prática (leia-se: matemática) é uma AFIRMAÇÃO DE FÉ. (...) A segunda asserção oficial sobre demonstração é:

ASSERÇÃO 2: Qualquer demonstração prática correta pode ser preenchida de modo a tornar-se uma demonstração teórica correta (...)." Essa também parece ser um ARTIGO DE FÉ.

> Por "demonstração" queremos dizer demonstração correta, demonstração completa. Pelos padrões da lógica formal, as demonstrações ordinárias são incompletas. Quando uma demonstração matemática ordinária é enviada a um "referee", ele pode dizer "e necessário mais pormenor". Assim, mais pormenor é acrescentado e, então, a demonstração é aceita. Mas, essa versão aceita está ainda incompleta como uma demonstração formal! A demonstração original era matematicamente incompleta, a demonstração final é matematicamente completa, porém ambas SÃO FORMALMENTE INCOMPLETAS. O conceito formal de demonstração, no entanto, é irrelevante no que concerne ao ponto de preocupação do matemático.

Vemos que o problema epistemológico proposto no início - o que é uma demonstração matemática - é difícil. De fato esse problema é tão complexo que é capaz de levar um matemático de alto calibre, G.H. Hardy, a afirmar, em um artigo de 1929, precisamente intitulado "Mathematical Proof":

> *Se fôssemos até seu extremo, seríamos levado a uma conclusão bem paradoxal: que não existe, estritamente, uma tal coisa chamada DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA; que não podemos, em última análise, fazer nada senão INDICAR; que as demonstrações, que Littlewood e eu chamamos GÁS, são floreios retóricos designados a afetar a psicologia.*

Em suma, quando se trata de discorrer sobre a DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em

relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo[3]. DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA - se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei.

Bibliografia

HALMOS, P.R., **I Want to Be a Mathematician**, Math. Assoc. of America, 1985.

RAMSEY, F.P., **The Foundations of Mathematics**, Littlefield, Adams & Co., 1965.

SHOENFIELD, J.R., **Mathematical Logic**, Addison-Wesley, 1967.

STEWART, I. & D. Tall, **The Foundation of Mathematics**, Oxford U.P., 1977.

WEYL, H., **The Continuum**, Dover, 1987.

[3] Quid est ergo tempus? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio (...) [O que é, portanto, o tempo? Caso ninguém me demande, sei; se quero explicar ao demandante, não sei].